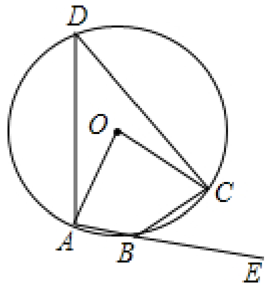
南京中考12年（2001-2012）数学试题分类解析汇编（12专题）

专题11：圆

一、选择题

1. （2001江苏南京2分）如图所示，四边形ABCD为⊙O的内接四边形，E为AB延长线的上一点，∠CBE=40°，则∠AOC等于【　　】



A．20°　　B．40°　　C．80°　　D．100°

【答案】C。

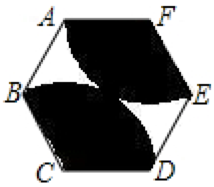
【考点】圆周角定理，圆内接四边形的性质。

【分析】根据圆内接四边形的外角等于内对角求出∠D，再利用同弧所对的圆周角等于圆心角的一半求解：

∵四边形ABCD为⊙O的内接四边形，∴∠CBE=∠D。∴∠AOC=2∠D=80°。故选C。

2.（江苏省南京市2002年2分）如图，正六边形ABCDEF的边长是a,分别以C、F为圆心，a为半径画弧，则图中阴影部分的面积是【　　】

A、$\frac{1}{6}\pi r^2$　B、$\frac{1}{3}\pi r^2$　C、$\frac{2}{3}\pi r^2$　D、$\frac{4}{3}\pi r^2$



【答案】C。

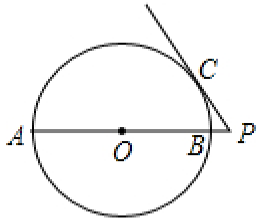
【考点】多边形内角和定理，扇形面积公式。

【分析】∵正六边形的每个内角为$\frac{(6-2)\times 180^0}{6}=120^0$，∴阴影为两个圆心角为120°的扇形。

∴根据扇形面积公式得图中阴影部分的面积是$S=2\cdot\frac{120\cdot\pi\cdot a^2}{360}=\frac{2}{3}\pi a^2$。故选C。

3. （江苏省南京市2003年2分）如图，AB是⊙O的直径，P是AB延长线上的一点，PC切⊙O于点C，PC＝3，PB＝1，则⊙O的半径等于【　　】.

（A）$\frac{5}{2}$ （B）3 （C）4 （D）$\frac{9}{2}$



【答案】C。

【考点】切割线定理。

【分析】因为 PC，PA 分别是圆的切线与割线，根据切割线定理可求得 PC=3，从而求得 AB=8，即可求得半径的长：

∵PC，PA 分别是圆的切线与割线，∴PC^2=PB•PA。

∵PC=3，PB=1，∴PA=9，AB=8。∴半径为 4．故选 C。

4.（江苏省南京市 2003 年 2 分）正方形 ABCD 的边长是 2cm，以直线 AB 为轴旋转一周，所得到的圆柱的侧面积为【　　】.

（A）$16\pi cm^2$ （B）$8\pi cm^2$ （C）$4\pi cm^2$ （D）$4cm^2$

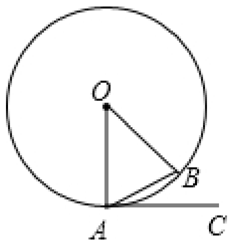
【答案】B。

【考点】圆柱的计算。

【分析】根据圆柱的侧面积公式=底面周长×高计算解：圆柱的侧面面积=π×2×2×2=8π（cm^2）。故选 B。

5.（江苏省南京市 2004 年 2 分）如图，A，B 是⊙O 上的两点，AC 是⊙O 的切线，∠B=70°，则∠BAC 等于【　　】

A、70° B、35° C、20° D、10°



【答案】C。

【考点】等腰三角形的性质，切线的性质。

【分析】欲求∠BAC，由 AC 是⊙O 的切线知道∠OAC=90°，又可推知∠OAB=∠B，则∠BAC 可求：

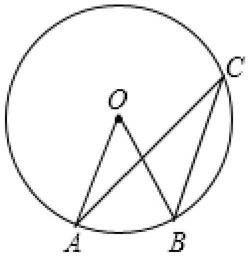
∵OA=OB，∴∠B=∠OAB=70°。

∵AC 是⊙O 的切线，∴OA⊥AC，即∠OAC=90°。∴∠BAC=∠OAC －∠OAB=20°。故选 C。

6.（江苏省南京市2006年2分）如图，点A、B、C在⊙O上，AO∥BC，∠OAC=20°，则∠AOB的度

数是【 】

A.1O ° B.20 ° C.40 ° D.70 °

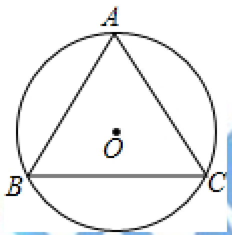


【答案】C。

【考点】圆周角定理，平行线的性质。

【分析】∵∠OAC=20°，AO∥BC，∴∠ACB =∠OAC=20°。∴∠AOB=2∠ACB =40°。故选 C。

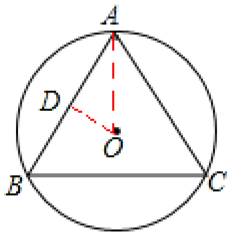
7. （江苏省南京市 2008 年 2 分）如图，⊙O 是等边三角形 ABC 的外接圆，⊙O 的半径为 2，则等边三角形 ABC 的边长为【 】



A．$\sqrt{3}$ B．$\sqrt{5}$ C．$2\sqrt{3}$ D．$2\sqrt{5}$

【答案】C。

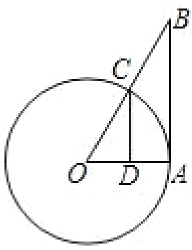
【考点】三角形的外接圆与外心，等边三角形的性质，垂径定理，锐角三角函数，特殊角的三角函数值。



【分析】连接 OA，并作 OD⊥AB 于 D，则∠OAD=30°，OA=2，

∴AD=OA•cos30°=$\sqrt{3}$。∴AB=$2\sqrt{3}$。故选 C。

8. （江苏省南京市 2008 年 2 分）如图，已知⊙O 的半径为 1，AB 与⊙O 相切于点 A，OB 与⊙O 交于点 C，OD⊥OA，垂足为 D，则 cos∠AOB 的值等于【 】



A．OD B．OA C．CD D．AB

【答案】A。

【考点】切线的性质，锐角三角函数的定义。

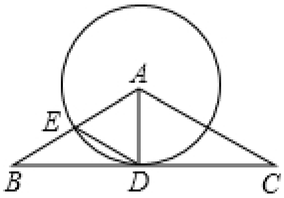
【分析】利用余弦的定义求解：

∵CD⊥OA，∴∠CDO=90°。

∵OC=1，∴cos∠AOB=OD：OC=OD。故选 A。

二、填空题

1.（2001 江苏南京 2 分）如图，在△ABC 中，AB=AC，∠BAC=120°，⊙A 与 BC 相切于点 D，与 AB 相交于点 E，则∠ADE 等于____▲____。



【答案】60°。

【考点】切线的性质，等腰三角形的性质，等边三角形的判定和性质。

【分析】∵⊙A 与 BC 相切于点 D，∴AD⊥BD，即∠ADB=90°。

∵AB=AC，∠BAC=120°，∴∠BAD=$\frac{1}{2}$∠BAC=60°。

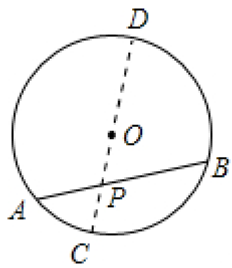
∵AE=AD，∴△AED 是等边三角形。∴∠ADE=60°。

2.（2001 江苏南京 2 分）已知⊙O 的半径为 4cm，AB 是⊙O 的弦，点 P 在 AB 上，且 OP=2cm，PA=3cm，则 PB=____▲____cm。

【答案】4。

【考点】相交弦定理。

【分析】根据相交弦定理"圆内两弦相交于圆内一点，各弦被这点所分得的两线段的长的乘积相等"进行计算：



如图，作直线 OP 交⊙O 于 C、D 两点，

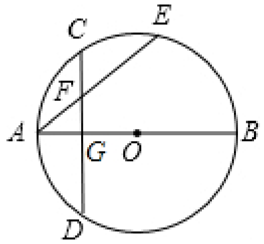
∵⊙O 的半径为 4cm，OP=2cm，PA=3cm，

∴PC=4－2=2cm，PD=4+2=6cm。

由相交弦定理得：PA•PB=PC•PD，∴PB=$\frac{PC\cdot PD}{PA}=\frac{2\times 6}{3}$=4（cm）。

【没学相交弦定理的可连接 AC、BD，应用△APC∽△DPB 求解】

3.（江苏省南京市 2002 年 2 分）如图，AB 是⊙O 的直径，弦 CD⊥AB，垂足为 G，F 是 CG 的中点，延长 AF 交⊙O 于 E，CF＝2，AF＝3，则 EF 的长是____▲____.



【答案】4。

【考点】垂径定理，相交弦定理。

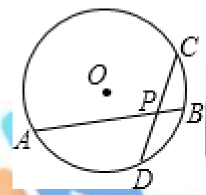
【分析】根据相交弦定理及垂径定理求解：

∵AB 是⊙O 的直径，弦 CD⊥AB，垂足是 G，F 是 CG 的中点，∴CG=GD，CF=FG=$\frac{1}{2}$CG。

∵CF=2，∴CG=GD=2×2=4，FD=2+4=6。

由相交弦定理得 EF•AF=CF•FD，即 EF=CF•FD AF =2×6 3 =4。

4. **（江苏省南京市 2003 年 2 分）**如图，⊙O 的两条弦 AB、CD 相交于点 P，PD＝2PB，PC＝2cm，则 PA ＝___▲___cm．



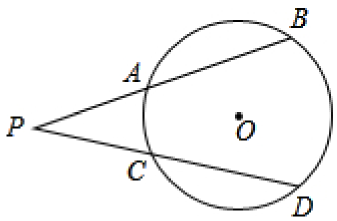
【答案】4。

【考点】相交弦定理。

【分析】由相交弦定理可以得到 PA•PB=PC•PD，然后利用已知条件即可求出 PA：

$$PA=\frac{PC\cdot PD}{PB}=\frac{2\cdot 2PB}{PB}=4\left(cm\right)。$$

5. **（江苏省南京市 2004 年 2 分）**如图，割线 PAB 与⊙O 交于点 A、B，割线 PCD 与⊙O 交于点 C、D，PA=PC，PB=3cm，则 PD=___▲___cm．

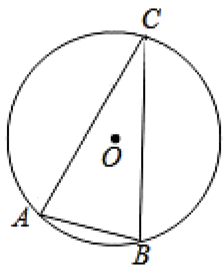


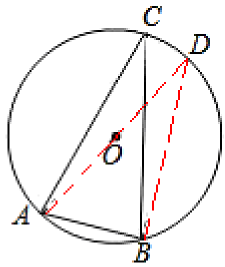
【答案】3。

【考点】切割线定理。

【分析】根据割线定理得 PA•PB=PC•PD，已知 PA=PC 从而可得到 PB=PD=3cm。

6. **（江苏省南京市 2007 年 3 分）**如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，∠C=30°，AB=2cm，则⊙O 的半径为 ___▲___cm．





【答案】2。

【考点】三角形的外接圆与外心，圆周角定理。

【分析】作直径 AD，连接 BD，得∠ABD=90°，∠D=∠C=30°，

∴AD=4，即圆的半径是 2。

7.（江苏省南京市 2008 年 3 分）已知⊙ O_1 和⊙ O_2 的半径分别为 3cm 和 5cm，且它们内切，则圆心距 O_1O_2 等于___▲___cm.

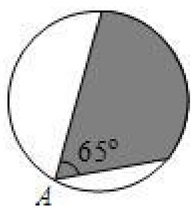
【答案】2。

【考点】圆与圆的位置关系。

【分析】根据两圆的位置关系的判定：外切（两圆圆心距离等于两圆半径之和），内切（两圆圆心距离等于两圆半径之差），相离（两圆圆心距离大于两圆半径之和），相交（两圆圆心距离小于两圆半径之和大于两圆半径之差），内含（两圆圆心距离小于两圆半径之差）。因此，

由于⊙ O_1 和⊙ O_2 内切，则圆心距 O_1O_2 =5－3=2。

8.（江苏省南京市 2008 年 3 分）如图，有一圆形展厅，在其圆形边缘上的点 A 处安装了一台监视器，它的监控角度是 65°．为了监控整个展厅，最少需在圆形边缘上共安装这样的监视器___▲___台.



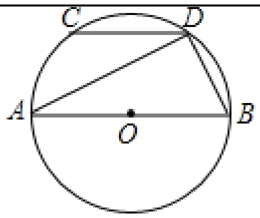
【答案】3。

【考点】圆周角定理

【分析】∵∠A=65°，∴该圆周角所对的弧所对的圆心角是 130°。

又∵360°÷130°= $2\frac{10}{13}$，∴共需安装这样的监视器 3 台。

9.（江苏省 2009 年 3 分）如图，AB 是⊙O 的直径，弦 CD∥AB．若∠ABD=65°，则∠ADC=___▲___.



【答案】25°。

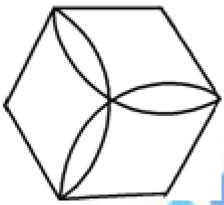
【考点】圆周角定理，平行线的性质，直角三角形两锐角的关系。

【分析】∵CD∥AB，∴∠ADC=∠BAD。

又∵AB 是⊙O 的直径，∴∠ADB=90°。

又∵∠ABD=65°，∴∠ADC=∠BAD=90°—∠ABD=25°。

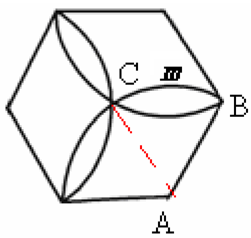
10.（江苏省 2009 年 3 分）已知正六边形的边长为 1cm，分别以它的三个不相邻的顶点为圆心，1cm 长为半径画弧（如图），则所得到的三条弧的长度之和为____▲____cm（结果保留π）.



【答案】2π 。

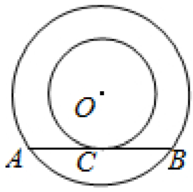
【考点】正六边形的性质，扇形弧长公式。

【分析】如图，连接 AC，则由正六边形的性质知，扇形 ABmC 中，半径 AB=1，圆心角∠BAC=60^0，∴弧长 CmB$=\frac{60\cdot\pi\cdot1}{180}=\frac{1}{3}\pi$ 。



由正六边形的对称性，知，所得到的三条弧的长度之和为弧长 CmB 的 6 倍，即 2π 。

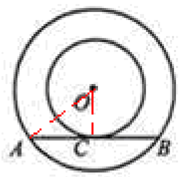
11.（江苏省南京市 2010 年 2 分）如图，以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 是小圆的切线，C 为切点．若两圆的半径分别为 3cm 和 5cm，则 AB 的长为____▲____cm．



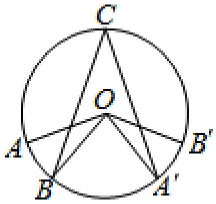
【答案】8。

【考点】圆的切线的性质，勾股定理，垂径定理。

【分析】连接 OA、OC，由切线的意义知△OAC 为直角三角形，再由勾股定理得 $OA^2=OC^2+AC^2$，即 $5^2=3^2+AC^2$，所以 AC=4，再由垂径定理得 AB=2AC=8。



12.（江苏省南京市 2010 年 2 分）如图，点 C 在⊙O 上，将圆心角∠AOB 绕点 O 按逆时针方向旋转到∠A′OB′，旋转角为 α（0°<α<180°）．若∠AOB=30°，∠BCA′=40°，则∠α=____▲____°.



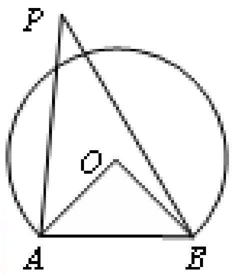
【答案】110°。

【考点】旋转的性质，圆周角与圆心角的关系。

【分析】根据同弧所对圆周角与圆心角的的一半，得∠BOA′=2∠BCA′=80°，

所以∠α=∠AOB+∠BOA′=30°+80°=110°。

13.（江苏省南京市 2011 年 2 分）如图，海边有两座灯塔 A、B，暗礁分布在经过 A、B 两点的弓（弓形的弧是⊙O 的一部分）区域内，∠AOB=80°，为了避免触礁，轮船 P 与 A、B 的张角∠APB 的最大值为 ▲ °。



【答案】40。

【考点】圆周角定理，三角形的外角性质。

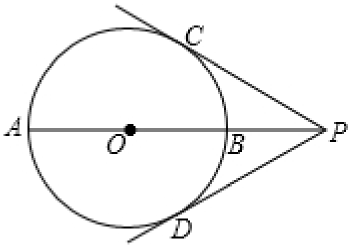
【分析】为了避免触礁，轮船 P 与 A、B 的张角∠APB 的最大值是轮船 P 落在圆周上，根据同弦所对的圆周角是圆心角的一半的定理，轮船 P 与 A、B 的张角∠APB 的最大值为 40°。

三．解答题

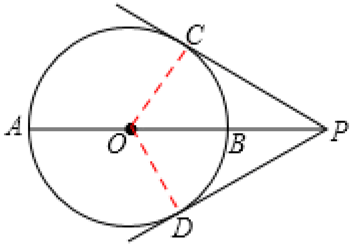
1.（2001 江苏南京 7 分）如图，AB 是⊙O 的直径，P 在 AB 的延长线上，PD 与⊙O 相切于 D，C 在⊙O 上，PC=PD。

（1）求证：PC 是⊙O 的切线；

（2）连接 AC，若 AC=PC，PB=1，求⊙O 的半径。



【答案】解：（1）证明：连接 OC，OD。



∵PD 与⊙O 相切于 D，∴∠PDO=90°。

∵C 在⊙O 上，PC=PD，OP=OP，OC=OD，

∴△OCP≌△ODP（SSS）。∴∠OCP=∠PDO=90°。

∴PC 是⊙O 的切线。

（2）连接 OC。

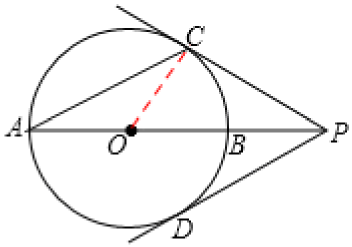
∵AC=PC，∴∠CAO=∠CPA。

∵AO=CO，∴∠CAO=∠OCA。

∵在△ACP 中，∠CAP＋∠CPA＋∠ACP=180^0，

∴3∠CPA＋90^0=180^0，即∠CPA=30°。

∴在 Rt△OCP 中，OC=$\frac{1}{2}$OP，即 OC=$\frac{1}{2}$（1+OB）。



∵OC=OB，∴OC=1。∴⊙O 的半径为 1。

【考点】切线的判定和性质，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，含 30 度角直角三角形的性质。

【分析】（1）要证 PC 是⊙O 的切线，只要连接 OC，OD，通过证明△OCP≌△ODP 得出∠OCP=90°即可。

（2）运用等腰三角形等边对等角的性质和三角形内角和定理求出∠CPA 的度数，应用含 30 度角直角三角形的性质得出⊙O 的半径。

2. （2001 江苏南京 7 分）如图 1，在平面上，给定了半径为 r 的圆 O，对于任意点 P，在射线 OP 上取一点 P′，使得 OP•OP′=r^2，这把点 P 变为点 P 的变换叫做反演变换，点 P 与点 P′叫做互为反演点。

（1）如图 2，⊙O 内外各一点 A 和 B，它们的反演点分别为 A 和 B′。求证：∠A′=∠B；

（2）如果一个图形上各点经过反演变换得到的反演点组成另一个图形，那么这两个图形叫做互为反演图形。

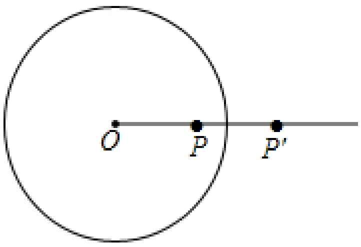


图1

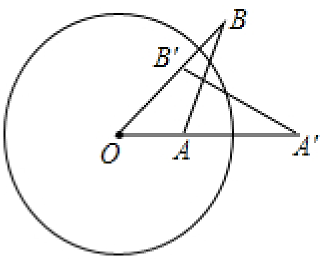


图2

①选择：如果不经过点 O 的直线 l 与⊙O 相交，那么它关于⊙O 的反演图形是【　　】

A、一个圆；　B、一条直线；　C、一条线段；　D、两条射线

②填空：如果直线 l 与⊙O 相切，那么它关于⊙O 的反演图形是____▲____；　该图形与圆 O 的位置关系是____▲____。

【答案】解：（1）证明：由题意知：OA•OA′=OB•OB′=r²，∴ $\frac{OB}{OA}=\frac{OA'}{OB'}$。

∵∠AOB=∠B′OA′，∴△AOB∽△B′OA′。∴∠A′=∠B。

（2）①选择 A。②圆；内切。

【考点】新定义，相似三角形的判定和性质，圆的确定，切线的性质。

【分析】（1）根据题中给出的条件可得出 OB•OB′=OA•OA′=r²，将等积式转换为比例式后即可得出△OAB 和△OBA 相似，由此可证得所求的条件。（学科网）

（2）①应该是一个过 O 点过两个交点的圆，反演图形中圆和直线都看成圆的话，结论会很简单，一个圆关于⊙O 反演图形仍然是圆，这时直线可以看成圆心无限远半径无限大的圆。

根据 OP•OP′=r²知：⊙O 外的点的反演点在⊙O 内；⊙O 内的点的反演点在⊙O 外；⊙O 上的点的反演点在⊙O 上。

直线与⊙O 相交的点的反演点还是该点，直线上的无穷远处的点反演到圆心，于是三点确定一个圆。

②如果直线 l 与⊙O 相切，那么它关于⊙O 的反演图形是过切点和 O 点的圆，该图形与圆 O 的位置关系是内切，既然直线只与⊙O 有一个交点，那么反演图形与⊙O 只有一个交点，即相切。直线 l 上有无限远点，于是反演图形过⊙O，于是反演图形为⊙O 的内切圆。

3.（2001 江苏南京 11 分）（1）如图 1，已知 A 点坐标为（0，3），⊙A 的半径为 1，点 B 在 x 轴上。

①若 B 点坐标为（4，0），⊙B 的半径为 3，试判断⊙A 与⊙B 的位置关系；

②若⊙B 过点 M（2，0），且与⊙A 相切，求 B 点坐标。

（2）如图 2，点 A 在 y 轴上，⊙A 在 x 轴的上方。

问：能否在 x 轴的正半轴上确定一点 B，使⊙B 与 y 轴相切，并且与⊙A 外切，为什么？

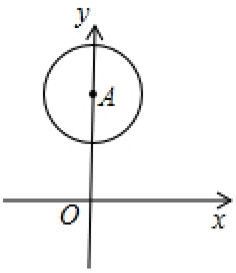


图1

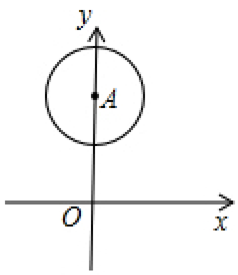


图2

【答案】解：（1）①∵A（0，3），B（4，0），∴OA=3，OB=4，AB= $\sqrt{3^2+4^2}=5>1+3$。

∴两圆外离。

②设 B（x，0），

∵⊙B 过点 M（2，0），∴⊙B 的半径为 $|x-2|$。

则 AB= $\sqrt{x^2+3^2}=\sqrt{x^2+9}$ 。

若⊙A 与⊙B 外切，$\sqrt{x^2+9}=1+|x-2|$，

$x\le2$ 时，$\sqrt{x^2+9}=1+2-x$，解得 x=0；

$x>2$ 时，$\sqrt{x^2+9}=1+x-2$，解得 x=－4，与 $x>2$ 不符。

∴B（0，0）。

若⊙A 与⊙B 内切，$\sqrt{x^2+9}=\left|1-|x-2|\right|$，

$x\le2$ 时，$\sqrt{x^2+9}=|1-2+x|$，解得 x=－4；

$x>2$ 时，$\sqrt{x^2+9}=|1+2-x|$，解得 x=0，与 $x>2$ 不符。

∴B（－4，0）。

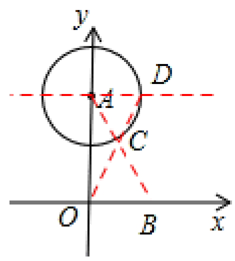
（2）能。过 A 作 AD∥x 轴，连接 OD 交⊙A 于 C，连接 AC 并延长交 x 轴于 B，则以 B 为圆心，以 OB 为半径的⊙B 与 y 轴相切，并且与⊙A 外切。理由如下：

∵AD∥x 轴，∴∠ADO=∠BOD。

∵AC=AD，∴∠ADC=∠ACD。∴∠OCB=∠BOC。

∴BC=OB。

∴以 B 为圆心，以 OB 为半径的⊙B 与 y 轴相切，并且与⊙A 外切。



【考点】圆与圆的位置关系，坐标与图形性质，勾股定理，平行的性质，等腰判定和性质。

【分析】（1）①先根据 A、B 的坐标求出圆心距 AB 的长，然后和两圆的半径进行比较即可；②本题可设出 B 点的坐标，然后表示出圆心距 AB 的长，和⊙B 的半径长，分内切和外切两种情况进行求解。

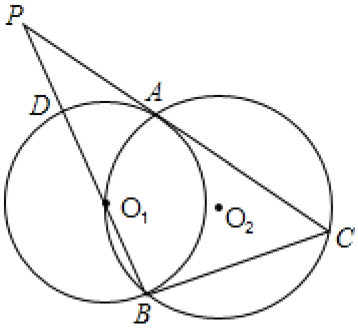
（2）可过 A 作 x 轴的平行线交⊙A 于 D，连接 OD 交⊙A 于 C，连接 AC 并延长交 x 轴于 B，则⊙B 以 BC 为半径，与 y 轴相切，与⊙A 外切。

4.（江苏省南京市 2002 年 9 分）已知：如图，⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A、B 两点，O_1 在⊙O_2 上，⊙O_2 的弦 BC 切⊙O_1 于 B，延长 BO_1、CA 交于点 P、PB 与⊙O_1 交于点 D。

（1）求证：AC 是⊙O_1 的切线；

（2）连结 AD、O_1C，求证：AD∥O_1C；

（3）如果 PD＝1，⊙O_1 的半径为 2，求 BC 的长。

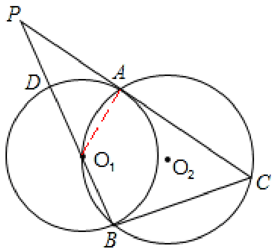


【答案】解：(1) 证明：连接 O_1A，

∵BC 是⊙O_1 的切线，∴$\angle O_1BC=90°$。

∵$\angle O_1AP$ 是圆 O_2 的内接四边形的外角，

∴$\angle PAO_1=\angle O_1BC=90°$。∴AC 是⊙$O_1$ 的切线。

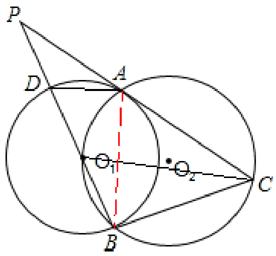


(2) 证明：连接 AB，

∵PC 切⊙O_1 于点 A，∴$\angle PAD=\angle ABD$。

∵$\angle ACO_1=\angle ABO_1$，∴$\angle PAD=\angle ACO_1$。

∴$AD\parallel O_1C$。



(3) ∵PC 是⊙O_1 的切线，PB 是⊙O_1 的割线，

∴$PA^2=PD\cdot PB$。

∵PD=1，PB=5，∴$PA=\sqrt{5}$。

又∵$AD\parallel O_1C$，∴$\frac{PD}{DO_1}=\frac{PA}{AC}$，即$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{AC}$。∴$AC=2\sqrt{5}$。

∵AC，BC 都是⊙O_1 的切线，∴$BC=AC=2\sqrt{5}$。

【考点】切线的性质和判定，圆内接四边形的性质，圆周角定理，平行的判定和性质，切割线定理，切线长定理。

【分析】(1) 证 AC 是圆 O_1 的切线，可连接 O_1A 然后证 $O_1A\perp PC$ 即可，可通过$\angle PAO_1$ 是圆 O_2 的内接四边形的外角来求解。

(2) 证 $AD\parallel O_1C$，证$\angle PAD=\angle O_1CA$ 即可，可通过与两角相等的中间角来求解；连接 BA，那么$\angle O_1BA$ 就是与两角相等的中间角。

(3) 由于 BC，AC 同与圆 O_1 相切，因此根据切线长定理 AC=BC，那么求 BC 也就是求 AC 的长，有了 PD 和⊙O_1 的半径即 O_1D，O_1B 的值，那么可根据切割线定理求出 PA，由 (2) 得出的平行线，根据平行线分线段成比例定理，可得出关于 PA，PC，PD，PO 的比例关系，而 PD，DQ_1，PA 的值都已知，因此可求出 AC 的长，也就求出了 BC 的长。

5.（江苏省南京市 2002 年 8 分）已知：⊙O_1 与⊙O_2 外切，⊙O_1 的半径 R＝2，设⊙O_1 的半径是 r.

（1）如果⊙O_1 与⊙O_2 的圆心距 d=4,求 r 的值；

（2）如果⊙O_1、⊙O_2 的公切线中有两条互相垂直，并且 r≤R,求 r 的值。

【答案】解：（1）由⊙O_1 与⊙O_2 的圆心距 d=4 和⊙O_1 的半径 R＝2，得 2＋r=4，即 r=2。

（2）情形一，如图 1：这时 r=R=2。

情形 2，如图 2：根据切线长定理得到等腰直角三角形，

则有 AO=OB=2 ，$OO_2=r+2+\sqrt{2}r$，$\therefore r+2+\sqrt{2}r=2\sqrt{2}$，解得 $r=6-4\sqrt{2}$ 。

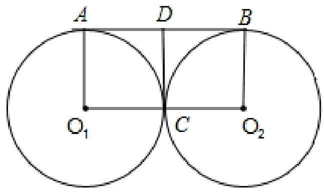


图 1

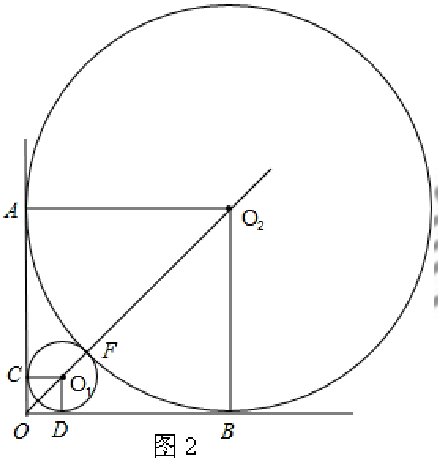


图 2

【考点】相切两圆的性质，勾股定理。

【分析】（1）根据两圆外切，圆心距等于两圆半径之和进行计算。

（2）分 r=R 和 r＜R 两种情形求解。r=R 时直接可得。r＜R 时，根据切线长定理和切线的性质定理发现两个等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质得到方程进行计算。

6.（江苏省南京市 2003 年 8 分）阅读下面材料：

对于平面图形 A，如果存在一个圆，使图形 A 上的任意一点到圆心的距离都不大于这个圆的半径，则称图形 A 被这个圆所**覆盖**.

对于平面图形 A，如果存在两个或两个以上的圆，使图形 A 上的任意一点到其中某个圆的圆心的距离都不大于这个圆的半径，则称图形 A 被这些回所**覆盖**.

例如：图 1 中的三角形被一个圆所覆盖，图 2 中的四边形被两个圆所覆盖.

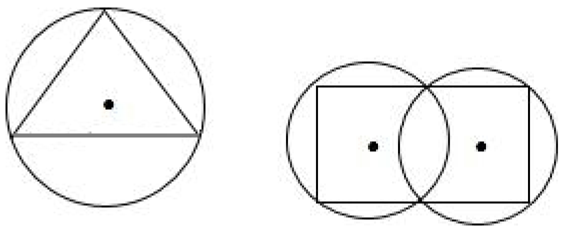


图 1　　　　图 2

回答下列问题：

⑴ 边长为 1cm 的正方形被一个半径为 r 的圆所覆盖，r 的最小值是___cm；

⑵ 边长为 1cm 的等边三角形被一个半径为 r 的圆所覆盖，r 的最小值是___cm；

⑶ 长为 2cm，宽为 1cm 的矩形被两个半径都为 r 的圆所覆盖，r 的最小值是____cm，这两个圆的圆心距是____cm．

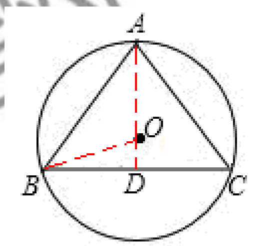
【答案】解：（1）$2\sqrt{2}$。（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。（3）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；1。

【考点】正多边形和圆

【分析】当一个图形被一个圆覆盖时，当圆是这个图形的外接圆时，圆最小；当矩形被两圆覆盖，圆最小时，两圆的公共弦一定是 1cm，则每个圆内的部分是一个边长是 1 的正方形：

（1）以正方形的对角线为直径做圆是覆盖正方形的最小圆，半径 r 的最小值=$2\sqrt{2}$；

（2）边长为 1 cm 的等边三角形被一个半径为 r 的圆所覆盖，这个最小的圆是正三角形的外接圆，如图作三角形 ABC 的高 AD 构成直角三角形 ABD，斜边 AB=1，BD=$\dfrac{1}{2}$ 。



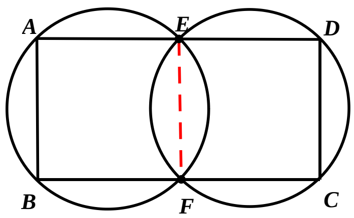
∵三角形是正三角形，∴∠ABC=60°。

∵O 是外心，∴∠OBC=30°，OD=$\dfrac{1}{2}$OB。

设 OA=OB=x，则 OD=$\dfrac{1}{2}$x，

在直角三角形 OBD 中，根据勾股定理列方程：$x^2=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2}x)^2$，解得：x=$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

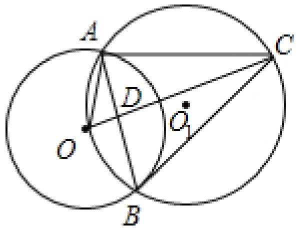
（3）如图：矩形 ABCD 中 AB=1，BC=2，则覆盖 ABCD 的两个圆与矩形交于 E、F 两点，由对称性知 E、F 分别是 AD 和 BC 的中点，则四边形 ABFE、EFCD 是两个边长为 1 的正方形，所以圆的半径 r=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，两圆心距=1。



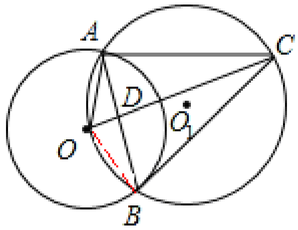
7.（江苏省南京市 2003 年 9 分）如图⊙O 与⊙O’相交于 A、B 两点，点 O 在⊙O’上，⊙O’的弦 OC 交 AB 于点 D．

⑴ 求证：OA^2＝OC OD；

⑵ 如果 AC＋BC＝$\sqrt{3}$OC，⊙O 的半径为 r．求证：AB＝$\sqrt{3}r$



【答案】证明：（1）连接 OB，



∵OA=OB，∴∠OAB=∠OBA。

∵∠OCA=∠OBA，∴∠OAB=∠OCA。

∵∠AOC=∠DOA，∴△AOC∽△DOA。

∴ $\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OA}$，即 $OA^2=OC\cdot OD$。

（2）∵△AOC∽△DOA，∴ $\frac{AC}{OC}=\frac{DA}{OA}$。

同理可得，$\frac{BC}{OC}=\frac{DB}{OB}$。

∴ $\frac{AC}{OC}+\frac{BC}{OC}=\frac{DA}{OA}+\frac{DB}{OB}$，即 $\frac{AC+BC}{OC}=\frac{AB}{OA}$。

∵AC+BC= $\sqrt{3}$OC，OA=r，∴AB= $\sqrt{3}$r。

【考点】圆与圆的位置关系，相交两圆的性质，等腰三角形的性质，圆周角定理，相似三角形的判定和性质。

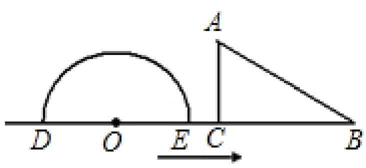
【分析】（1）欲证 $OA^2=OC\cdot OD$，通过证明△AOC∽△DOA 妈可以得出。

（2）因为 AC+BC= $\sqrt{3}$OC，⊙O 的半径为 r，欲证 AB= $\sqrt{3}$r，只需证明（AC+BC）：OC=AB：OA；通过证明△AOC∽△DOA，△OBD∽△OCB，得出比例形式相加，即可得出。

8.（江苏省南京市 2005 年 11 分）如图，形如量角器的半圆 O 的直径 DE=12cm，形如三角板的△ABC 中，∠ACB=90°，∠ABC=30°，BC=12cm．半圆 O 以 2cm/s 的速度从左向右运动，在运动过程中，点 D、E 始终在直线 BC 上．设运动时间为 t (s)，当 t=0s 时，半圆 O 在△ABC 的左侧，OC=8cm．

（1）当 t 为何值时，△ABC 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切？

（2）当△ABC 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切时，如果半圆 O 与直径 DE 围成的区域与△ABC 三边围成的区域有重叠部分，求重叠部分的面积．



【答案】解：（1）△ABC 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切有以下四种情形：

情形一：当半圆 O 所在的圆运动到点 E 与点 C 重合时，半圆 O 在 AC 左边与 AC 相切，如图 1。

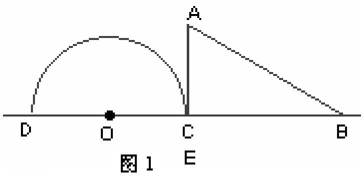


图 1

此时，半圆 O 运动的距离为 8－6=2。

∴t=2÷2=1 (s)。

情形二：当半圆 O 所在的圆运动到点 O 与点 C 重合时，半圆 O 在 AB 左边与 AB 相切，如图 2。

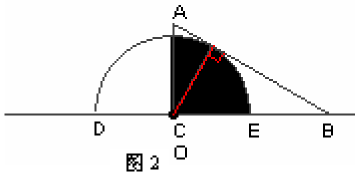


图 2

此时，半圆 O 运动的距离为 8。

∴t=8÷2=4 (s)。

情形三：当半圆 O 所在的圆运动到点 D 与点 C 重合时，半圆 O 在 AC 右边与 AC 相切，如图 3。

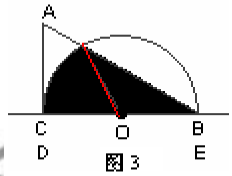


图 3

此时，半圆 O 运动的距离为 8＋6=14。

∴t=14÷2=7 (s)。

情形四：当半圆 O 所在的圆运动到 AB 右边与 AB 相切时，如图 4。

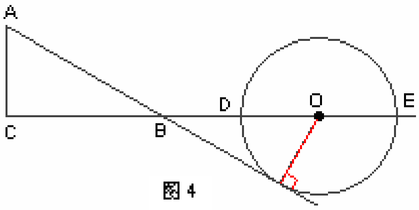


图 4

此时，半圆 O 运动的距离为 8＋12＋12=32。

∴t=32÷2=16 (s)。

综上所述，当 t=1，4，7，16 s 时，△ABC 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切。

（2）当△ABC 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切时，半圆 O 与直径 DE 围成的区域与△ABC 三边围成的区域有重叠部分的有两种情形：

情形一：当半圆 O 所在的圆运动到点 O 与点 C 重合时，半圆 O 在 AB 左边与 AB 相切，如图 2。此时半圆 O 与直径 DE 围成的区域与△ABC 三边围成的区域重叠部分为 $\frac{1}{4}$ 圆面积=9πcm^2。

情形二：当半圆 O 所在的圆运动到点 D 与点 C 重合时，半圆 O 在 AC 右边与 AC 相切，如图 3。此时半圆 O 与直径 DE 围成的区域与△ABC 三边围成的区域重叠部分为扇形 OCF 加上△OBF。

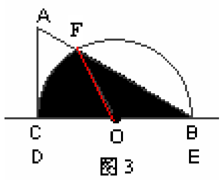


图 3

∵∠COF=2∠ABC=60°，∴扇形 OCF 的面积为 $\frac{60\cdot\pi\cdot 6^2}{360}$=6$\pi$ cm^2。

∵△OBF 的边 OB 上的高=$6\sin 60^0=3\sqrt{3}$，∴△OBF 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ cm^2。

∴重叠部分面积=$6\pi+9\sqrt{3}$ cm^2。

综上所述，当△ABC 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切时，半圆 O 与直径 DE 围成

的区域与△ABC 三边围成的区域重叠部分的面积为 $9\pi cm^2$ 或 $6\pi+9\sqrt{3}\ cm^2$。

【考点】运动问题，直线与圆相切的性质，扇形和三角形的面积，等腰三角形的性质，三角形外角定理，锐角三角函数，特殊角的三角函数值。

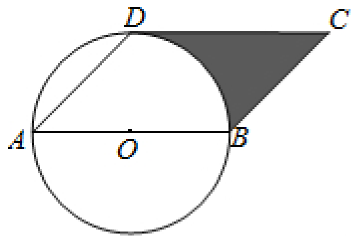
【分析】（1）根据直线与圆相切的性质分四种情形分别讨论即可。

（2）分两种情形分别求出重叠部分的面积。

9.（江苏省南京市 2010 年 8 分）如图，AB 是⊙O 的直径，点 D 在⊙O 上，∠DAB=45°，BC∥AD，CD∥AB．

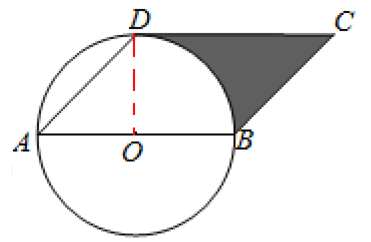
（1）判断直线 CD 与⊙O 的位置关系，并说明理由；

（2）若⊙O 的半径为 1，求图中阴影部分的面积（结果保留 π）．



【答案】解：（1）直线 CD 与⊙O 相切。理由如下：

如图，连接 OD。



∵OA=OD，∠DAB=45°，∴∠ODA=45°。∴∠AOD=90°。

∵CD∥AB，∴∠ODC=∠AOD=90°，即 OD⊥CD。

又∵点 D 在⊙O 上，直线 CD 与⊙O 相切。

（2）∵BC∥AD，CD∥AB，∴四边形 ABCD 是平行四边形。∴CD=AB=2。

∴$S_{梯形OBCD}=\dfrac{(OB+CD)\cdot OD}{2}=\dfrac{(1+2)\times 1}{2}=\dfrac{3}{2}$。

∴图中阴影部分的面积为 $S_{梯形OBCD}-S_{扇形OBD}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}\pi\times 1^2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}$。

【考点】等腰三角形的性质，三角形内角和定理，平行的性质，直线与圆相切的判定，平行四边形的判定和性质。扇形面积。

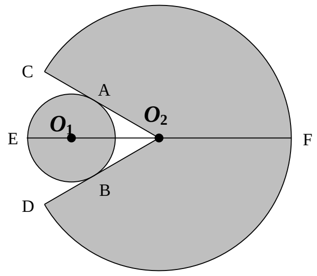
【分析】（1）欲判断直线 CD 与⊙O 的位置关系，由图形可猜想其结论为相切，由条件∠DAB=45°，CD∥AB 知∠ADC=135°，再连接 OD 得∠ADO=45°，因此∠ODC=90°，猜想得证。

（2）观察图形发现阴影部分可在梯形 ODCB 中求解：梯形 ODCB 的面积减扇形 OBD 的面积。

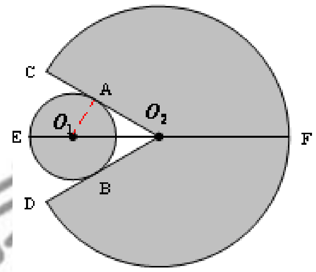
10. （2012 江苏南京 8 分）某玩具由一个圆形区域和一个扇形区域组成，如图，在⊙O_1 和扇形 O_2CD 中，⊙O_1 与 O_2C、O_2D 分别相切于 A、B，$\angle CO_2D=60°$，E、F 事直线 O_1O_2 与⊙O_1、扇形 O_2CD 的两个交点，EF=24cm，设⊙O_1 的半径为 x cm，

① 用含 x 的代数式表示扇形 O_2CD 的半径；

② 若⊙ O_1 和扇形 O_2CD 两个区域的制作成本分别为 0.45 元 $/cm^2$ 和 0.06 元 $/cm^2$，当⊙ O_1 的半径为多少时，该玩具成本最小？



【答案】解：（1）连接 O_1A。



∵⊙O_1 与 O_2C、O_2D 分别切一点 A、B，

∴$O_1A \perp O_2C$，O_2E 平分∠CO_2D。

∵ $\angle CO_2D = 60°$，∴ $\angle AO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle CO_2D = 30°$。

在 Rt△O_1AO_2 中，$\sin\angle AO_2O_1 = \frac{AO_1}{O_1O_2}$，∴$O_1O_2$=A O_1 $\sin\angle AO_2O_1$ =x sin30 °=2x。

∵EF=24cm，∴$FO_2=EF-EO_1-O_1O_2=24-3x$，即扇形 O_2CD 的半径为（24－3x）cm。

（2）设该玩具的制作成本为 y 元，则

$$y = 0.45\cdot\pi x^2 + 0.06\cdot\frac{(360-60)\times\pi\times(24-3x)^2}{360} = 0.9\pi x^2 - 7.2\pi x + 28.8\pi$$

$$= 0.9\pi(x-4)^2 + 14.4\pi \text{。}$$

∴当 x=4 时，y 的值最小。

答：当⊙O_1 的半径为 4cm 时，该玩具的制作成本最小。

【考点】切线的性质，锐角三角函数定义，扇形面积的计算，二次函数的最值。

【分析】（1）连接 O_1A．由切线的性质知 $\angle AO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle CO2D = 30°$；然后在 Rt△$O_1AO_2$ 中利用锐角三角函数的定义求得 $O_1O_2=2x$；最后由图形中线段间的和差关系求得扇形 O_2CD 的半径 FO_2。

（2）设该玩具的制作成本为 y 元，则根据圆形的面积公式和扇形的面积公式列出 y 与 x 间的函数关系，然后利用二次函数的最值即可求得该玩具的最小制作成本。